

Quina relació hi ha entre els queviures, la fotografia i l'àlgebra de matrius?

Joan Gómez i Urgellés

Escola Politècnica Superior d'Enginyeria de Vilanova i la Geltrú
Universitat Politècnica de Catalunya

Resum

Es proposen dues situacions reals, una relacionada amb el tractament d'imatges i l'altra relacionada amb les compres quotidianes, per tal que els estudiants construeixin models matemàtics. En concret, les situacions tenen per model la diferència de matrius i el producte de matrius, operacions que l'alumnat construeix de manera natural a partir de les situacions plantejades.

Abstract

Two real-life situations are proposed: one related to image processing, and the other to everyday purchases, on the basis of which students build mathematical models. More specifically, the situations are modelled on both the difference of matrices and the product of matrices, operations that the students construct naturally from the situations posed.

1. Introducció

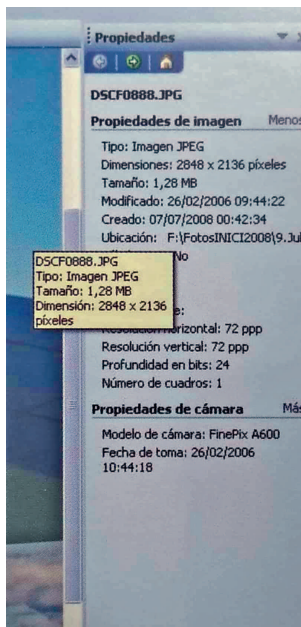
Es presenta una proposta per a l'ensenyament/aprenentatge d'alguns elements de càlcul matricial a partir de la modelització matemàtica. En concret, s'estableixen situacions quotidianes que tenen per model matemàtic les matrius i les seves operacions. En particular s'exposa com podem construir models per il·lustrar el concepte de matriu i presentar les operacions bàsiques de la diferència i el producte de matrius. Inicialment es mostra una matriu com a model matemàtic d'una imatge i a partir d'aquest model s'argumenta com la diferència de matrius esdevé un model per comparar imatges. Per a això ens cal disposar de l'eina anomenada Octave, que ens permetrà la recerca del model numèric d'una imatge en blanc i negre, que està representat per una matriu. Posteriorment veurem que el producte de matrius és un model que es pot deduir de manera natural de la situació quotidiana de la compra de queviures. La idea és destacar l'epistemologia del càlcul matricial per reforçar els aspectes cognitius dels estudiants i alhora oferir una visió contextualitzada en la vida real. Això enriqueix l'heurística i visualitza la connexió entre el simbolisme de les matemàtiques (implementat en el model) i les situacions reals.

A aquesta imatge del violí li correspon la matriu següent:

170	170	180	181	185	189	191	186	179	172	164	132	98	56	37	53	30	55	50	44	55	41	41	65	46	47
168	173	177	177	188	194	187	186	179	159	161	133	93	59	35	49	30	49	57	43	54	45	44	45	43	40
160	171	182	183	190	194	192	187	172	171	138	134	90	63	33	38	32	48	49	42	58	48	43	40	43	41
175	175	185	192	193	194	193	187	174	172	164	150	87	55	52	51	40	47	48	47	46	42	41	43	43	43
176	181	185	189	191	192	195	190	170	174	165	145	85	54	48	47	46	48	49	49	42	45	41	42	43	43
178	180	189	194	197	197	196	189	181	174	164	146	73	53	38	48	16	45	45	50	56	46	43	41	43	43
182	186	192	197	200	201	198	190	184	184	176	158	74	46	48	45	45	39	41	42	53	44	42	40	41	43
182	189	195	203	209	217	215	203	190	183	176	158	79	49	45	43	43	42	46	47	53	42	41	41	39	44
183	187	200	211	216	223	140	56	20	16	11	7	12	13	23	38	49	48	46	46	45	41	40	38	40	43
191	191	220	214	143	43	9	5	7	7	8	6	8	7	7	12	23	33	44	44	42	42	40	42	43	43
196	227	190	45	5	6	7	9	8	7	6	7	4	9	7	6	7	11	24	47	37	39	41	46	43	41
215	182	25	4	8	8	9	7	9	6	7	48	44	7	8	6	8	9	19	31	38	40	42	45	41	
180	21	6	8	9	8	9	2	25	122	178	144	39	9	7	9	7	7	8	15	30	38	38	41	38	
63	2	8	7	9	8	4	22	142	203	179	153	126	80	8	6	8	7	9	6	15	33	38	39	41	
11	8	9	8	8	8	6	31	141	183	187	181	168	167	112	35	9	8	8	7	9	8	14	31	40	40
5	9	8	8	7	8	9	117	172	169	187	182	163	158	131	65	21	7	7	6	8	8	18	37	37	37
8	9	8	8	9	7	6	62	174	172	183	180	165	149	127	95	33	12	8	7	8	8	8	9	21	37
10	7	9	8	8	7	7	12	136	181	181	174	160	153	128	88	41	26	8	8	8	7	7	8	27	7
9	8	8	8	7	7	7	68	182	176	170	154	154	119	92	41	35	17	8	7	8	7	7	7	14	8
9	9	7	8	8	7	7	21	152	176	168	160	151	126	87	41	39	29	8	6	7	7	8	7	8	8
9	8	9	8	8	7	8	10	117	182	166	150	147	120	75	39	39	35	16	6	8	7	6	7	6	6
10	9	9	7	8	8	7	8	108	177	167	159	151	105	82	42	39	37	27	8	8	7	7	7	8	8
10	9	8	9	7	8	8	11	122	172	160	152	127	80	45	42	37	33	13	5	8	7	8	7	8	7
10	10	9	10	8	8	8	6	26	145	168	160	150	144	110	82	41	38	39	34	18	8	7	8	7	8
7	10	10	9	9	8	8	6	97	157	151	149	147	102	66	49	42	36	34	25	7	8	6	8	8	8
35	9	7	9	7	4	42	151	161	162	160	153	150	105	77	43	40	35	35	30	9	7	8	7	6	6
115	20	24	12	13	26	66	142	157	155	163	160	152	148	107	67	48	40	35	34	31	12	9	7	7	8
140	123	117	95	92	139	154	153	150	156	162	157	151	148	105	62	44	38	38	34	32	17	7	8	6	8
136	134	145	146	143	152	151	157	166	167	166	160	153	147	112	78	43	39	41	36	33	23	7	9	7	7
138	142	144	145	150	153	156	158	168	171	171	157	149	155	108	61	51	43	40	37	34	24	8	7	5	9
143	141	145	149	153	159	159	157	167	176	170	163	160	154	110	62	48	43	38	35	32	30	12	8	7	7
140	150	145	151	156	159	158	162	169	172	167	162	156	151	114	59	53	45	38	35	30	33	17	7	8	8
150	150	150	157	164	164	166	170	174	172	174	166	155	116	71	51	47	41	36	34	33	21	8	9	9	9
155	148	153	158	160	168	168	171	178	178	170	165	161	153	104	66	47	43	40	37	34	33	21	8	8	8
151	151	156	157	163	166	165	174	176	177	170	165	163	154	118	67	45	41	40	35	33	34	25	9	7	8
147	152	156	161	167	169	167	171	177	180	180	167	154	155	128	80	52	38	37	37	34	34	26	10	7	8
154	153	158	164	170	169	171	172	185	181	173	171	159	156	128	81	60	43	42	40	36	33	27	10	8	8
150	155	162	167	168	172	172	176	179	180	175	168	163	155	133	77	54	44	44	38	38	33	29	11	8	8
140	157	161	166	172	169	167	174	179	182	184	174	162	164	134	81	57	42	43	38	38	34	31	14	8	8
155	160	160	164	171	169	173	178	182	182	182	177	164	158	139	98	69	43	41	41	37	35	31	16	8	8
152	158	161	165	168	173	176	180	179	185	186	174	167	157	136	96	74	47	44	40	37	34	33	17	8	8

Observeu quina meravella de taula numèrica! Fins i tot la densitat i la distribució de números «dibuixen» el perfil de violí considerat. És francament una bellesa! Més endavant s'explica com s'obté el model.

De fet, si podem escollir una imatge desada en el nostre ordinador, amb el ratolí situat sobre la imatge i clicant el botó dret i obrint la pestanya que diu «propietats» apareixerà tota la informació relativa a les dimensions de la imatge. Depenent de la qualitat i la resolució, i de l'espai que hi hagi al disc, hi ha diverses maneres de tenir imatges desades i, per tant, trobem els formats .bmp, .tiff, .jpg, etc.



Per obtenir el model matricial d'una imatge ens caldrà disposar de l'eina Octave. Formalment, l'Octave utilitza internament mètodes numèrics molt sofisticats per obtenir el model matricial. Tot seguit s'explica com es fa.

2.2. Octave: generar la matriu de píxels d'una imatge

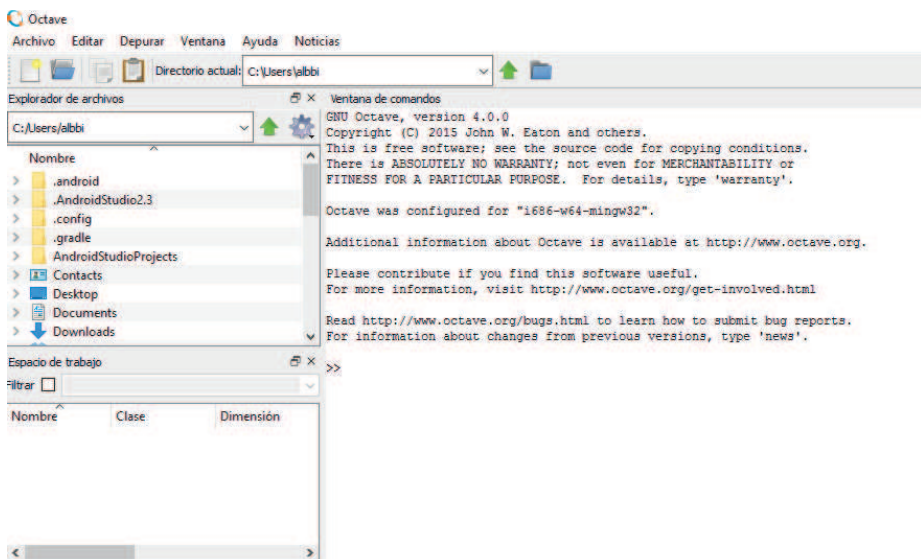
Octave és un programa informàtic per realitzar càlculs numèrics, és totalment gratuït i està disponible per a Windows, Mac i Linux a la web www.gnu.org/software/octave/. Va aparèixer al voltant de l'any 1988 i va ser creat per alumnes d'Enginyeria Química de la Universitat de Texas i la Universitat de Wisconsin-Madison amb la idea de dissenyar reactors químics. De fet, es va fer com a alternativa al conegut Matlab. Conté una gran quantitat d'eines que permeten resoldre problemes d'àlgebra, càlcul i estadística. A més a més, també és capaç de processar imatges digitals. Destaquem que hi ha una versió d'Octave per a telèfons intel·ligents (*smartphones*).

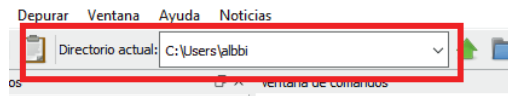
Ens fixarem en imatges en blanc i negre, ja que la matriu associada és una taula de números distribuïts únicament en fileres i columnes; les imatges en color serien «una matriu tridimensional», ja que cada color s'obté a partir dels tres colors bàsics, que en anglès es coneixen amb l'acrònim RGB (*red, green, blue*).

Amb el programa Octave podem generar la matriu de píxels de qualsevol imatge. Com?

Per aconseguir la matriu de píxels de qualsevol imatge hem seguir els passos que s'indiquen a continuació:

1. Per instal·lar el programa cal anar a l'enllaç: www.gnu.org/software/octave/ o bé ftp://ftp.gnu.org/gnu/octave/windows/octave-4.0.0_0-installer.exe.
2. Un cop instal·lat el programa Octave, l'obrim i visualitzem alguna cosa semblant a la pantalla següent:





Escollim una imatge que prèviament hem desat al directori i a continuació seleccionem la imatge de la qual ens interessa conèixer la matriu de píxels associada.

Recordem que per a això cal desar la imatge en la carpeta que per defecte crea l'Octave; en el cas que ens ocupa la ubicació és: C:\Users\albbi.

De fet, al si de la pantalla que ens mostra l'Octave hem de situar-nos en el directori on hi ha les imatges.

Un cop tenim la imatge a la carpeta, s'ha d'introduir en la finestra d'ordres la instrucció següent:

```
image = imread («nom de la imatge.extensió»)
```

2.3. Experiència de modelització

Exposarem una experiència que es va realitzar a l'aula per tal de mostrar la diferència de matrius com a model matemàtic d'una situació de tractament d'imatge. A tall d'exemple, considerem dues imatges diferents en blanc i negre, desades prèviament al nostre ordinador, i les comparem.

A l'ordinador les tenim desades amb els noms imatge1.jpg i imatge2.jpg:



Imatge 1



Imatge 2

Les fotografies són aparentment idèntiques, però això no és cert: la segona té un puntet diferent que hem destacat en color groc per tal que sigui visualitzat.

Escriurem les línies següents a l'Octave:

```
NomVariable1 = imread («fotografia1.jpg»);
```

```
>> I = imread("fotografial.jpg");
```

Com es pot veure, hem utilitzat `I` com a nom per a la variable.

El que fem amb aquesta línia és guardar en la variable `I` la imatge 1. El que guardem realment és la matriu de la fotografia 1.

Tot seguit escrivim la instrucció `NomVariable2 = I2 = imread(«fotografia2.jpg»)`

```
>> I2 = imread("fotografia2.jpg");
```

El que fem amb aquesta línia és guardar en la variable `I2` la fotografia 2.

En executar el programa (clicant la tecla de retorn, *enter*) després de cada instrucció, la pantalla mostra, respectivament, les matrius com a model matemàtic de cada imatge. S'obté respectivament:

```
>> I
I =

Columns 1 through 21:

    159    159    159    159    159    159    159    159    161    161
    161    161    161    161    161    161    161    161    159    159
    161    161    161    161    161    161    161    161    161    157    157
    159    159    159    159    159    159    159    159    159    157    157
    158    158    158    158    158    158    158    158    158    158    158
    158    158    158    158    158    158    158    158    158    158    158
    158    158    158    158    158    158    158    158    158    156    156
    157    157    157    157    157    157    157    157    157    157    154    154
    155    155    155    155    155    155    155    155    155    157    157
    155    155    155    155    155    155    155    155    155    155    155
    156    156    156    156    156    156    156    156    156    156    154    154
    155    155    155    155    155    155    155    155    155    153    153
    154    154    154    154    154    154    154    154    154    153    153
```

Captura sencera de la matriu que correspon a la imatge 1:

159	159	159	159	159	159	159	159	159	161	161	162	163	164	164	165	165	166	166	167	168	169
161	161	161	161	161	161	161	161	161	159	159	160	161	162	162	163	163	164	165	165	166	167
161	161	161	161	161	161	161	161	157	158	158	160	160	161	161	163	164	164	165	166	166	167
159	159	159	159	159	159	159	157	157	158	158	160	160	160	161	161	164	164	165	166	166	167
158	158	158	158	158	158	158	158	158	158	159	159	160	161	162	162	165	165	166	167	168	168
158	158	158	158	158	158	158	158	158	158	159	159	160	161	161	162	164	164	165	166	166	167
158	158	158	158	158	158	158	158	156	156	157	157	158	159	160	160	161	162	162	163	165	165
157	157	157	157	157	157	157	157	154	154	155	155	156	157	158	158	159	160	161	162	161	162
155	155	155	155	155	155	155	155	157	157	158	158	159	159	159	160	164	164	164	164	164	164
155	155	155	155	155	155	155	155	155	156	156	156	157	157	158	158	162	162	162	162	162	162
156	156	156	156	156	156	156	156	154	154	154	155	155	156	156	157	159	159	159	159	159	159
155	155	155	155	155	155	155	155	153	153	154	154	155	156	156	156	156	156	156	156	157	157
154	154	154	154	154	154	154	154	153	153	154	155	155	156	156	157	155	155	155	156	156	156
152	152	152	152	152	152	152	152	151	152	152	153	154	155	155	155	153	154	154	154	154	155
150	150	150	150	150	150	150	150	148	148	148	149	150	151	151	152	152	151	151	152	152	152
148	148	148	148	148	148	148	148	145	146	146	147	148	149	149	150	149	148	148	148	149	149
147	147	147	148	148	148	149	149	149	148	147	147	147	147	147	147	148	148	148	148	149	149
146	147	147	147	148	148	149	149	147	146	146	145	145	146	146	147	148	148	148	149	149	149
146	146	146	147	147	147	147	148	146	145	145	144	144	145	145	146	147	147	148	148	148	149
146	146	146	146	146	146	147	147	146	145	145	145	145	145	145	146	146	146	146	147	147	148
146	146	146	146	146	146	146	146	147	146	146	145	145	146	146	147	145	145	145	146	146	147
147	147	147	147	147	147	147	147	147	147	146	146	146	146	146	147	147	145	145	146	146	147
148	148	148	148	147	147	147	147	146	146	145	145	145	145	146	146	146	146	146	146	147	148
149	149	148	148	148	148	148	148	147	145	144	144	143	143	144	144	145	147	147	148	148	149
149	148	148	147	146	145	145	145	143	143	143	143	143	143	143	143	143	146	146	146	147	147
149	149	148	147	146	146	145	145	143	143	143	143	143	143	143	143	145	146	146	147	147	147
149	149	148	147	146	146	145	145	143	143	143	143	143	143	143	143	145	145	146	146	147	147
148	148	148	147	146	145	145	144	143	143	143	143	143	143	143	142	145	145	145	146	146	146

I, anàlogament, per a la segona imatge:

```
>> I2
I2 =
ans(:,:,1) =
Columns 1 through 18:
159 159 159 159 159 159 159 159 161 161 1
161 161 161 161 161 161 161 161 159 159 1
161 161 161 161 161 161 161 161 161 157 157 1
159 159 159 159 159 159 159 159 157 157 1
158 158 158 158 158 158 158 158 158 158 1
158 158 158 158 158 158 158 158 158 158 1
158 158 158 158 158 158 158 158 156 156 1
157 157 157 157 157 157 157 157 157 154 154 1
155 155 155 155 155 155 155 155 157 157 1
155 155 155 155 155 155 155 155 155 156 1
156 156 156 156 156 156 156 156 156 154 154 1
155 155 155 155 155 155 155 155 153 153 1
154 154 154 154 154 154 154 154 153 153 1
152 152 152 152 152 152 152 152 151 152 1
150 150 150 150 150 150 150 150 148 148 1
```

159	159	159	159	159	159	159	159	159	161	161	162	162	163	164	165	165	166	166	167	168	169
161	161	161	161	161	161	161	161	159	159	160	161	161	162	163	163	164	165	165	166	167	
161	161	161	161	161	161	161	157	157	158	159	160	160	161	161	161	163	164	164	165	166	166
159	159	159	159	159	159	159	159	157	157	158	159	159	160	161	161	164	164	165	166	167	
158	158	158	158	158	158	158	158	158	158	159	160	160	161	162	162	165	165	166	167	168	
158	158	158	158	158	158	158	158	158	158	159	159	160	161	162	162	164	164	165	166	167	
158	158	158	158	158	158	158	158	156	156	157	158	158	159	160	160	161	162	162	163	165	
157	157	157	157	157	157	157	157	154	154	155	156	157	157	158	158	159	159	160	161	162	
155	155	155	155	155	155	155	155	157	157	158	158	159	159	159	160	164	164	164	164	164	
155	155	155	155	155	155	155	155	155	156	156	156	157	157	158	158	162	162	162	162	162	
156	156	156	156	156	156	156	156	154	154	154	155	155	156	156	157	159	159	159	159	159	
155	155	155	155	155	155	155	155	153	153	154	154	155	156	156	156	156	157	157	157	157	
154	154	154	154	154	154	154	154	153	153	154	155	155	156	156	157	155	155	155	156	156	
152	152	152	152	152	152	152	152	151	152	152	153	154	155	155	155	153	153	154	154	155	
150	150	150	150	150	150	150	150	148	148	148	149	150	151	151	152	152	151	151	151	152	153
148	148	148	148	148	148	148	148	148	145	146	147	148	149	149	150	149	149	150	150	151	
147	147	147	148	148	148	149	149	149	148	147	147	147	147	147	148	148	148	148	148	149	149
146	147	147	147	148	148	148	149	149	147	146	146	145	145	146	146	147	148	148	148	149	149
146	146	146	147	147	147	147	148	146	145	145	144	144	145	145	146	147	147	148	148	149	149
146	146	146	146	146	146	146	147	146	145	145	145	145	145	145	146	146	146	147	147	148	148
146	146	146	146	146	146	146	146	146	147	146	146	145	145	146	146	147	145	145	146	146	147
147	147	147	147	147	147	147	147	147	147	146	146	146	146	146	147	147	145	145	146	146	147
148	148	148	148	147	147	147	147	146	146	145	145	145	146	146	146	146	146	147	147	148	148
149	149	148	148	148	148	148	148	147	145	144	144	143	143	144	144	145	147	147	148	148	149
149	148	148	147	146	145	145	145	143	143	143	143	143	143	143	143	143	146	146	146	147	147
149	149	148	147	146	146	145	145	143	143	143	143	143	143	143	143	143	145	146	146	147	147
149	149	148	147	146	146	145	145	143	143	143	143	143	143	143	143	143	145	145	146	146	147
148	148	148	147	146	145	145	144	143	143	143	143	143	143	143	142	145	145	145	146	146	146

Com es pot observar, les diferències entre les imatges queden plasmades en el fet que els valors dels models matricials són diferents. En altres paraules: podem captar les diferències entre imatges efectuant la diferència entre matrius i observant que on hi ha zeros no hi ha canvis i que als llocs on hi ha coeficients diferents de zero vol dir que hi ha canvis.

Per tant, la diferència de matrius seria un model matemàtic per comparar diferències entre imatges.

El model es va implementar a l'aula (en el primer curs d'informàtica a l'Escola Politècnica Superior d'Enginyeria de Vilanova i la Geltrú [EPSEVG]) com un treball en grup realitzat per estudiants procedents de cicles formatius i que en els currículums previs no havien treballat amb matrius, i els quals, tal com mostra la fotografia, el van exposar a la resta de companys.

Es pot observar que la matriu resultant ens indica les posicions de la imatge on hi ha diferències.

Un altre exemple curiós és esbrinar les diferències existents entre dos dibuixos extrets de la premsa escrita.



Més detalladament, ens fixem que tenem com a model, respectivament, les matrius numèriques següents:

105	113	98	103	112	99	99	108	113	115	139	116	74	52	29	38	37	43	54	68	72	70
103	105	92	99	111	106	111	123	128	91	46	32	56	91	114	121	130	128	126	122	122	123
88	86	97	108	99	115	124	77	22	44	72	100	121	130	132	129	128	128	130	131	129	128
98	92	114	96	135	137	27	6	71	94	115	125	125	125	132	140	134	136	137	138	139	138
96	102	86	130	113	19	26	86	118	125	129	128	126	125	128	131	133	131	130	130	130	132
96	99	120	119	23	11	118	135	122	129	133	139	142	138	129	122	128	129	129	129	132	136
108	129	132	28	30	126	118	118	149	151	149	141	133	127	126	125	113	115	118	123	127	129
87	107	38	26	103	117	115	163	141	147	147	142	131	123	118	117	121	118	117	118	123	126
59	0	20	94	110	121	149	131	151	149	145	140	134	129	125	119	91	81	73	66	66	73
237	60	65	111	123	119	135	136	144	122	149	130	117	132	111	47	20	19	25	41	40	32
133	54	114	126	123	127	115	133	132	120	128	130	126	121	35	50	139	193	213	204	199	212
64	90	143	129	118	129	122	132	130	128	112	119	115	46	54	210	240	249	239	247	252	245
76	142	135	126	118	124	133	94	75	77	114	134	112	28	181	236	249	255	244	245	255	252
103	144	120	127	121	127	97	45	44	22	22	49	107	28	198	250	236	255	254	253	254	252
127	122	129	127	120	137	54	65	180	225	176	53	31	42	204	248	255	255	254	255	254	253
130	117	131	123	119	132	34	136	248	212	244	219	57	47	233	236	234	255	255	245	243	255
110	123	117	121	125	114	29	177	231	112	108	226	144	70	233	243	247	231	237	253	243	242
78	126	121	128	115	124	46	177	247	233	148	92	215	168	239	247	244	249	245	234	234	255
41	117	115	115	132	127	35	167	250	170	72	107	243	236	255	214	147	123	120	158	254	243
108	51	130	120	127	130	66	94	255	93	195	214	228	253	163	78	79	93	47	49	243	250
223	37	68	128	118	115	108	33	195	147	120	243	239	154	36	138	191	94	52	86	176	255

107	88	120	93	111	91	115	92	102	107	82	105	119	123	120	78	66	49	30	31	41	68	48
105	113	98	103	112	99	99	108	113	115	139	116	74	52	29	38	37	43	54	68	72	70	71
103	105	92	99	111	106	111	123	128	2	46	32	56	91	114	121	130	128	126	122	122	123	124
88	86	97	108	99	115	124	77	22	44	72	100	121	130	132	129	128	128	130	131	129	128	124
98	92	114	96	135	137	27	6	71	94	115	125	125	125	132	140	134	136	137	138	139	138	137
96	102	86	130	113	19	26	86	118	125	129	128	126	125	128	131	133	131	130	130	130	132	133
96	99	120	119	23	11	118	135	122	129	133	139	142	138	129	122	128	129	129	129	132	136	138
108	129	132	28	30	126	118	118	149	151	149	141	133	127	126	125	113	115	118	123	127	129	131
87	107	38	26	103	117	115	163	141	147	147	142	131	123	118	117	121	118	117	118	123	126	131
59	0	20	94	110	121	149	131	151	149	145	140	134	129	125	119	91	81	73	66	66	73	84
237	60	65	111	123	119	135	136	144	122	149	130	117	132	111	47	20	19	25	41	40	32	38
133	54	114	126	123	127	115	133	132	120	128	130	126	121	35	50	139	193	213	204	199	212	216
64	90	143	129	118	129	122	132	130	128	112	119	115	46	54	210	240	249	239	247	252	245	248
76	142	135	126	118	124	133	94	75	77	114	134	112	28	181	236	249	255	244	245	255	252	248
103	144	120	127	121	127	97	45	44	22	22	49	107	28	198	250	236	255	254	253	254	252	255
127	122	129	127	120	137	54	65	180	225	176	53	31	42	204	248	255	255	254	255	254	253	253
130	117	131	123	119	132	34	136	248	212	244	219	57	47	233	236	234	255	255	245	243	255	253
110	123	117	121	125	114	29	177	231	112	108	226	144	70	233	243	247	231	237	253	243	242	211
78	126	121	128	115	124	46	177	247	233	148	92	215	168	239	247	244	249	245	234	234	255	189
41	117	115	115	132	127	35	167	250	170	72	107	243	236	255	214	147	123	120	158	254	243	213
108	51	130	120	127	130	66	94	255	93	195	214	228	253	163	78	79	93	47	49	243	250	240
223	37	68	128	118	115	108	33	195	147	120	243	239	154	36	138	191	94	52	86	176	255	255

Notem que les diferències entre les imatges són a la filera 3, columna 10: el 91 es converteix en un 2. També a la filera 21, columna 20, s'observa que el 49 es transforma en un 240.

És a dir, si restem les dues matrius, s'obtenen zeros a tot arreu, menys a la filera 3, columna 10, i a la filera 21, columna 20.

Als estudiants els podem comentar un exemple quotidià en què la diferència de matrius té un paper rellevant en temes de seguretat.

2.4. La diferència de matrius com a model de sistemes de seguretat

Podem comparar imatges en funció dels resultats anteriors. Pensem en una hipotètica sèrie de fotogrames (en blanc i negre) captats per càmeres de seguretat dins d'una entitat bancària. Considerem els models de dues imatges consecutives: l'aparell efectua la diferència entre les dues matrius i si s'obté la matriu nul·la podem interpretar que no s'ha produït cap moviment, i en aquest cas l'aparell no caldrà que emmagatzemi les imatges associades a les matrius; altrament, voldrà dir que hi ha moviment. D'aquesta manera, la resta de matrius ens mostren si hi ha hagut algun moviment o no a l'entitat. Aquest exemple correspon a una situació simplificada de com treballen les càmeres de seguretat en la vigilància nocturna d'empreses.

3. Anem al mercat: un model del producte de matrius

En la situació següent, els alumnes descobreixen de manera natural com es realitza el producte de matrius com a model que relaciona les quantitats de productes adquirits en un mercat i els seus preus, amb les despeses totals efectuades.

Farem un estudi senzill per esbrinar quin és el supermercat més econòmic per fer les compres habituals que s'ha escollit entre dues propostes. Efectuem la compra següent dos dies a la setmana, amb els productes i les quantitats que indiquem en el quadre, en dos supermercats diferents (Alcampo i Carrefour):

	<i>Llom (kg)</i>	<i>Taronges (kg)</i>	<i>Cabdells d'enciam (safata de 3 peces)</i>
<i>1r dia</i>	1	3	1
<i>2n dia</i>	3	2	2

Aquesta taula la podem escriure com:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcularem per a cada supermercat:

- quina és la despesa del primer dia.
- quina és la despesa del segon dia.

Calcularem globalment:

- quin és el supermercat més econòmic per cada dia.

Aquestes qüestions es poden plantejar als estudiants per tal que ells facin els càlculs i treguin les conclusions pertinents. A continuació indiquem les dades de cada supermercat:

Primer hipermercat



Cogollos de lechuga
 Vdad: Baby
 Cal: 3 pzas.
 Cat: 1º
 Origen: Murcia
 Bandaja 3 unid.
 (Unid. 0,25 €).
0,75 €
 = 125 Ptas.



Naranja de mesa a granel
 Vdad: Navel.
 Cal: 3/4.
 Cat: 1º
 Origen: Sudamérica.
 El kg.
1,25 €
 = 208 Ptas.



Cinta de lomo adobada extra, filetes
 El kg.
6,49 € = 1.080 Ptas.

Podem escriure la relació de preus en la taula següent:

Alcampo	Llom (kg)	Taronges (kg)	Cabdells d'enciam (safata de 3 peces)
Preu	6,49 €	1,25 €	0,75 €

Segon hipermercat



Cabdells
 Var: Lletre Omet
 Orig: Espanya
 Cal: 3 peces, Cat: 1a
1,25 €



Llomito de porc
 (Preu: 1 kg aprox.)
 El kg.
5,90 €



Taronja malla 4 kg
 Var: Valencia Late,
 Orig: Uruguai,
 Cal: 7-8, Cat: 2a
 El kg.
0,85 €

Carrefour	Llom (kg)	Taronges (kg)	Cabdells d'enciam (safata de 3 peces)
Preu	5,90 €	0,85 €	1,25 €

Càlculs quotidians de les despeses en cada supermercat:

- Alcampo

1r dia ⇒ $1 \cdot 6,49 + 3 \cdot 1,25 + 1 \cdot 0,75 = 10,00 \text{ €}$

2n dia ⇒ $3 \cdot 6,49 + 2 \cdot 1,25 + 2 \cdot 0,75 = 23,47 \text{ €}$

- *Carrefour*

$$1\text{r dia} \Rightarrow 1 \cdot 5,90 + 3 \cdot 0,85 + 1 \cdot 1,25 = 9,70 \text{ €}$$

$$2\text{n dia} \Rightarrow 3 \cdot 5,90 + 2 \cdot 0,85 + 2 \cdot 1,25 = 21,90 \text{ €}$$

Matemàticament, ho podem escriure com:

- *Alcampo*

$$1\text{r dia} \Rightarrow (1, 3, 1) \cdot (6,49, 1,25, 0,75) = 10,00 \text{ €}$$

$$2\text{n dia} \Rightarrow (3, 2, 2) \cdot (6,49, 1,25, 0,75) = 23,47 \text{ €}$$

- *Carrefour*

$$1\text{r dia} \Rightarrow (1, 3, 1) \cdot (5,90, 0,85, 1,25) = 9,70 \text{ €}$$

$$1\text{r dia} \Rightarrow (3, 2, 2) \cdot (5,90, 0,85, 1,25) = 21,90 \text{ €}$$

Notem que el que fem és l'anomenat *producte escalar euclidià*. Els estudiants han construït de manera natural el producte escalar.

En síntesi: una situació quotidiana com la compra de productes en un mercat té com a model matemàtic el producte escalar euclidià.

Globalment, podem escriure les despeses efectuades en cada supermercat com:

Alcampo

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6,49 \\ 1,25 \\ 0,75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10,99 \\ 23,47 \end{pmatrix}$$

1r i 2n dia

Carrefour

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5,90 \\ 0,85 \\ 1,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9,70 \\ 21,90 \end{pmatrix}$$

1r i 2n dia

Notem que el que fem, de manera natural, és construir el *producte d'una matriu per un vector columna*.

Podem agrupar les taules de manera que visualitzem la situació i el model matricial:

Q: quantitats de productes

	Llom (kg)	Taronges (kg)	Cabdells d'enciam (safata de 3 peces)
<i>Primer dia</i>	1	3	1
<i>Segon dia</i>	3	2	2

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

P: preus de cada supermercat

<i>Alcampo</i>	Llom (kg)	Taronges (kg)	Cabdells d'enciam (safata de 3 peces)
<i>Preu</i>	6,49 €	1,25 €	0,75 €
<i>Carrefour</i>	Llom (kg)	Taronges (kg)	Cabdells d'enciam (safata de 3 peces)
<i>Preu</i>	5,90 €	0,85 €	1,25 €

$$P = \begin{pmatrix} 6,49 & 5,90 \\ 1,25 & 0,85 \\ 0,75 & 1,25 \end{pmatrix}$$

D: taula de despeses

	Alcampo	Carrefour
<i>Despesa primer dia</i>	EUR10,90	9,70 €
<i>Despesa segon dia</i>	23,47 €	21,90 €

$$D = \begin{pmatrix} 10,90 & 9,70 \\ 23,47 & 21,90 \end{pmatrix}$$

D'aquesta manera podem introduir el que anomenem *producte de matrius*.

El següent model matemàtic relaciona les quantitats (Q), els preus (P) i les despeses (D):

$$Q \cdot P = D$$

En síntesi: notem que a partir de relacionar quantitats comprades i preus s'obté de manera natural l'algoritme per multiplicar matrius.

Si tornem a la comparativa inicial dels dos hipermercats, cal dir que, si més no en aquest petit estudi, la cadena de venda de productes més adient és Carrefour. La despesa total al Carrefour representa, a grans trets, un estalvi considerable respecte a la feta a l'Alcampo.

Els estudiants que van fer aquesta pràctica van descobrir com es multipliquen matrius de manera natural. D'altra banda, el professor pot plantejar situacions del tipus «si coneixem la matriu de despeses i la de quantitats, quins són els preus...?», i alhora introduir inverses i altres elements de càlcul matricial.

Aquests exemples són útils per mostrar que a partir de situacions reals es poden trobar patrons (models) que ens proporcionen informació sobre les situacions plantejades.

Òbviament, el lector pot plasmar la implicació de la modelització matemàtica en els currículums acadèmics i, alhora, observar que s'està fent un ensenyament totalment competencial.

